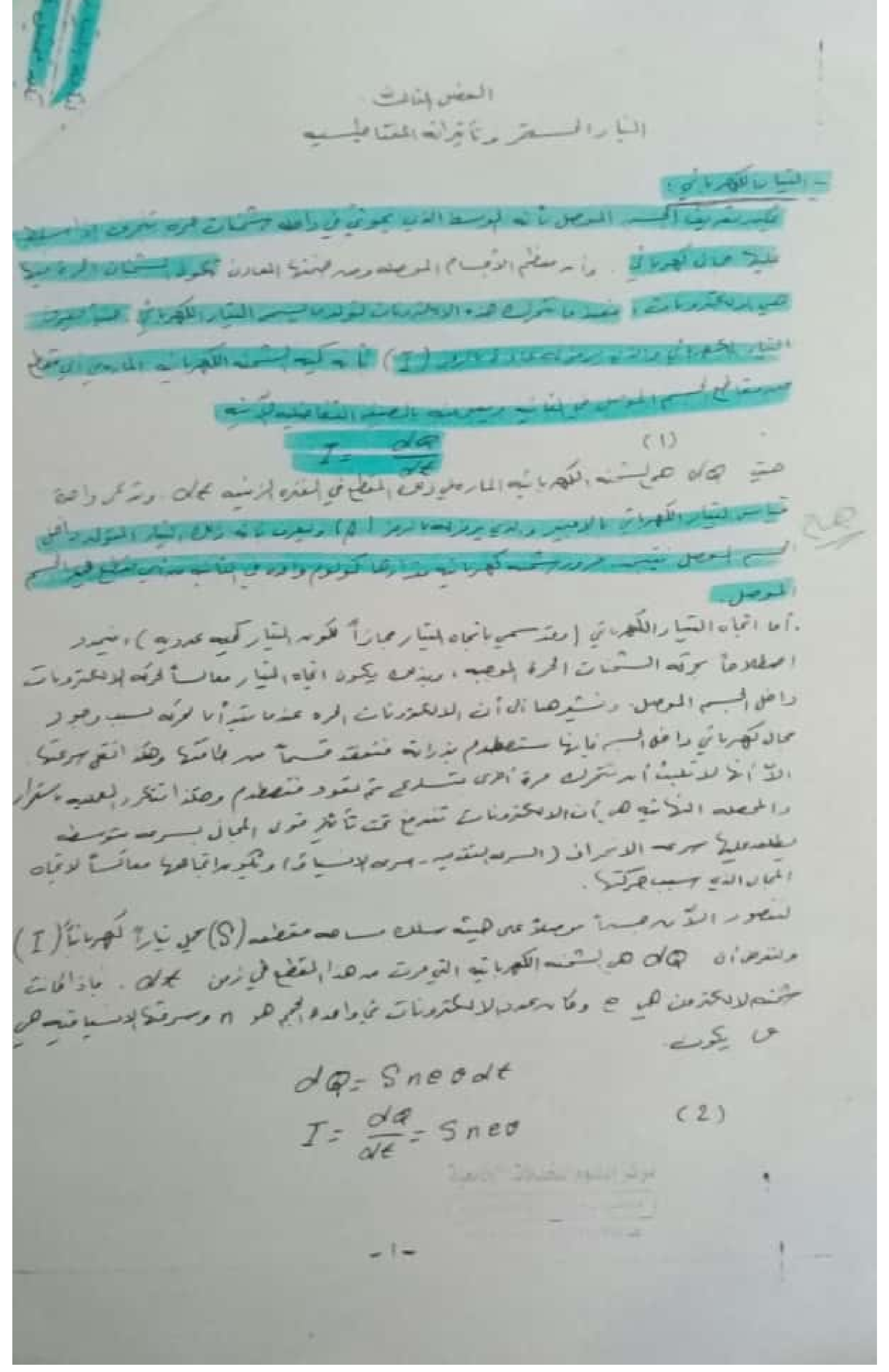


الفصل الثالث

التيار المستمر وتأثيراته المغناطيسية

- **التيار الكهربائي:**

يمكن تعريف الجسم الموصل بأنه الوسط الذي يحتوي في داخله شحنات حرة تتحرك إذا سلط عليها مجال كهربائي. وفي معظم الأجسام الموصلة ومنها المعادن تكون الشحنات الحرة هي الالكترونات، وعندما تتحرك هذه الالكترونات تولد ما يسمى التيار الكهربائي. شدة التيار الكهربائي والتي يرمز لها عادة بالرمز (I) بأنه كمية الشحنة الكهربائية المارة عبر مقطع مستعرض للجسم الموصل في وحدة الزمن ويعبر عنه بالصيغة التفاضلية الآتية

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (1)$$

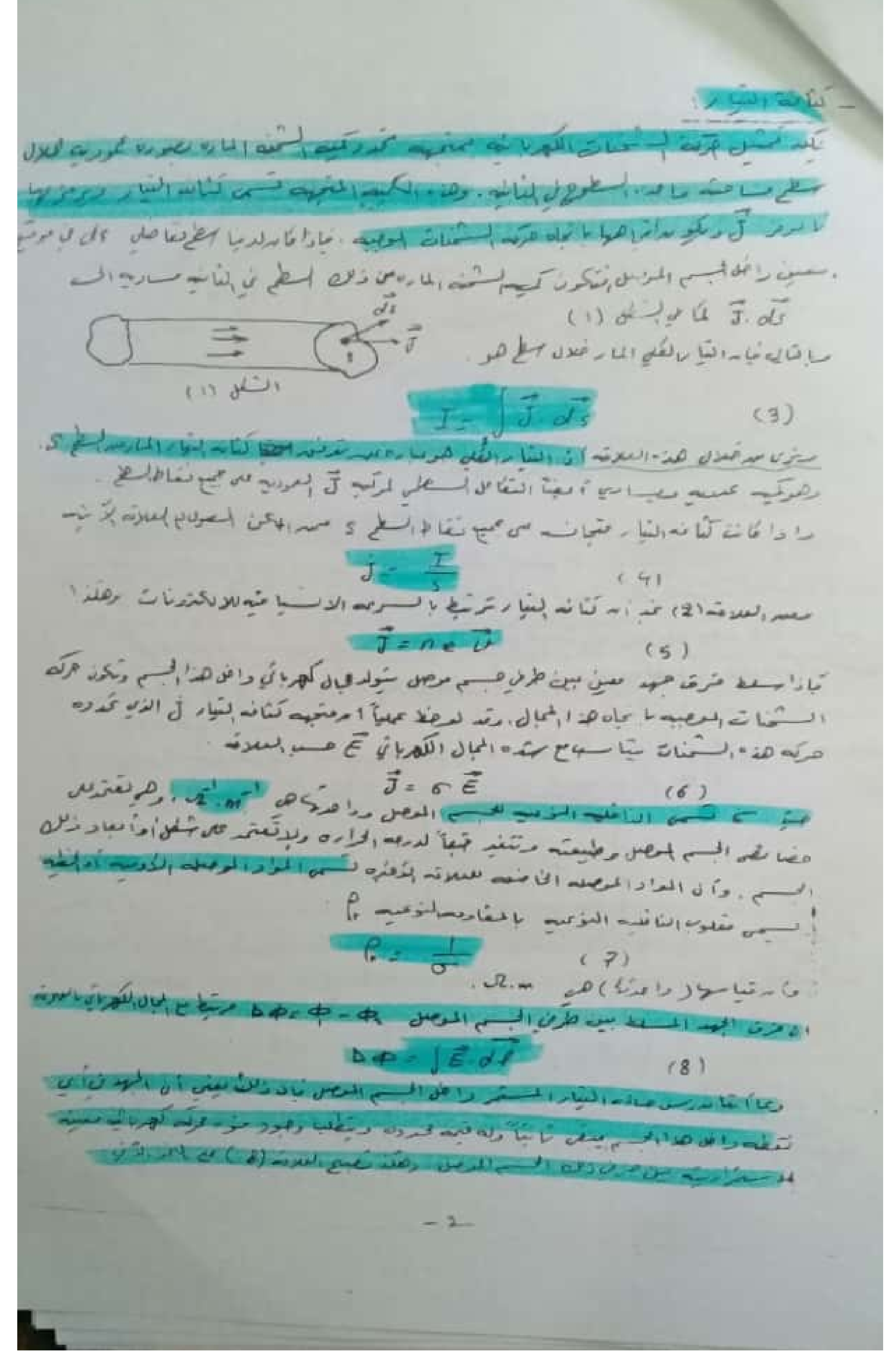
حيث dQ هي الشحنة الكهربائية المارة خلال المقطع في الفترة الزمنية dt. وتكون وحدة قياس التيار الكهربائي الأمبير والذي يرمز له بالرمز (A) ويعرف بأنه شدة التيار المتولد داخل الجسم الموصل نتيجة مرور شحنة كهربائية مقدارها كولوم واحد في الثانية خلال مقطع الجسم الموصل.

أما اتجاه التيار الكهربائي (وقد سمي باتجاه التيار مجازاً لكون التيار كمية عددية) فيحدد اصطلاحاً بحركة الشحنات الحرة الموجبة، وبذلك يكون اتجاه التيار معاكساً لحركة الالكترونات داخل الجسم الموصل. ونشير هنا الى أن الالكترونات الحرة عندما تبدأ بالحركة بسبب وجود مجال كهربائي داخل الجسم فإنها ستصطدم بذرات المشبك فتفقد قسماً من طاقتها وقد تتوقف حركتها (الى أن لا تلبث أن تتحرك مرة أخرى تتسارع ثم تعود فتصطدم وهكذا تتكرر العملية باستمرار والمحصلة النهائية هي) ان الالكترونات تندفع تحت تأثير قوى المجال بسرعة متوسطة يطلق عليها سرعة الانجراف (السرعة الانسياقية - سرعة الانسياق) ويكون اتجاهها معاكساً لاتجاه المجال الذي سبب حركتها.

لنتصور الآن أن جسماً موصلاً على هيئة سلك ذي مساحة مقطع (S) يحمل تياراً كهربائياً (I) ولنفرض أن dQ هي الشحنة الكهربائية التي مرت من هذا المقطع في الزمن dt. فإذا كانت شحنة الالكترون هي e وكان عدد الالكترونات في وحدة الحجم هو n وسرعته الانسياقية هي υ يكون:

$$dQ = Sne\upsilon\, dt$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = Sne\upsilon \qquad (2)$$



كثافة التيار :

تتولد حركة الشحنات الكهربائية، مع ما يرافقها من كمية الشحنة المارة بصورة عمودية خلال سطح مساحته واحدة في الثانية. وهذه الكمية المتجهة تسمى كثافة التيار ويرمز لها بالرمز $\vec{J}$ ويكون اتجاهها باتجاه حركة الشحنات الموجبة. فإذا كان لدينا سطح تفاضلي $d\vec{s}$ في موضع معين داخل الجسم الموصل فستكون كمية الشحنة المارة من ذلك السطح في الثانية مساوية إلى $\vec{J}\cdot d\vec{s}$ كما في الشكل (1)

الشكل (1)

وبالتالي فإن التيار الكلي المار خلال السطح هو

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s} \qquad (3)$$

نستنتج من خلال هذه العلاقة أن التيار الكلي هو عبارة عن تدفق متجه كثافة التيار المار خلال السطح S. وهو كمية عددية قياسية تساوي التكامل السطحي لمركبة $\vec{J}$ العمودية على جميع نقاط السطح.

وإذا كانت كثافة التيار متجانسة على جميع نقاط السطح S فيمكن الحصول على العلاقة الآتية

$$J = \frac{I}{S} \qquad (4)$$

ومن العلاقة (2) نجد أن كثافة التيار ترتبط بالسرعة الانسياقية للالكترونات وفقاً :

$$\vec{J} = n e \vec{v} \qquad (5)$$

فإذا سلط فرق جهد معين بين طرفي جسم موصل سيتولد مجال كهربائي داخل هذا الجسم وتكون حركة الشحنات الموجبة باتجاه هذا المجال، وقد لوحظ عملياً أن متجه كثافة التيار $\vec{J}$ الذي تحدثه حركة هذه الشحنات يتناسب مع شدة المجال الكهربائي $\vec{E}$ حسب العلاقة

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (6)$$

حيث σ تسمى الموصلية النوعية للجسم الموصل ووحداتها $\Omega^{-1} m^{-1}$ ، وهي تعتمد على نوع الجسم الموصل وطبيعته وتتغير تبعاً لدرجة الحرارة ولا تعتمد على شكل أو أبعاد ذلك الجسم. وأن المواد الموصلة التي تخضع للعلاقة أعلاه تسمى المواد الموصلة الأومية أو الخطية.

يسمى مقلوب الموصلية النوعية بالمقاومة النوعية ρ

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \qquad (7)$$

وتقاس بـ (أوم.م) $\Omega.m$

إن فرق الجهد المسلط بين طرفي الجسم الموصل $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ مرتبط مع المجال الكهربائي بالعلاقة

$$\Delta\phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (8)$$

وبما أننا ندرس حالة التيار المستمر داخل الجسم الموصل فإن ذلك يعني أن الجهد في أي نقطة داخل هذا الجسم يبقى ثابتاً وله قيمة محددة ويتطلب وجود قوة دافعة كهربائية معينة أو مستمرة بين طرفي ذلك الجسم الموصل. وعندئذ تصبح العلاقة (8) على الشكل الآتي

$$\Delta\phi = E\,\ell \qquad (9)$$

حيث ℓ تمثل طول الجسم الموصل. ونلاحظ هنا أن اتجاه المجال سيكون موازياً لطول الموصل وباستخدام العلاقتين (٤) و(٨) نحصل على

$$\Delta\phi = \frac{\ell}{\sigma} j = \frac{\ell}{\sigma S} I$$

ومنه ينتج أن

$$I = \frac{\sigma S}{\ell} \Delta\phi \qquad (10)$$

تسمى الكمية $\frac{\ell}{\sigma S}$ مقاومة الموصل ويرمز لها بالرمز R ووحدتها الأوم Ω وهي تتغير تبعاً لأبعاد الجسم ونوعه.

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} \qquad (11)$$

وهي تمثل صورة أخرى لقانون أوم وتستخدم في حالات كثيرة لمعرفة مقاومة أي جسم يمر فيه تيار كهربائي.

- انحفاظ الشحنة ومعادلة الاستمرارية :

(نظرية مهمة)

عندما يتلامس جسمان أو سطحان مشحونان يحدث توزيع جديد للشحنة على كل منهما إلا أنه لا يطرأ أي تغيير على الشحنة الكلية الموجودة فيهما. وهذا ما يقودنا الى القول بأن المجموع الجبري للشحنة الكلية في مجموعة أجسام مشحونة ومعزولة يبقى ثابتاً. ونشير هنا الى أن انعدام الشحنات الموجبة والسالبة في الذرة المتعادلة كهربائياً تدل على أن الشحنات متواجدة بكميات متساوية في نفس الذرة. وبالتالي نقول أن الشحنة لا تفنى ولا تستحدث أي أن الشحنة محفوظة. لنتصور الآن سطحاً مغلقاً S يحيط بحيز حجمه τ ويحتوي على شحنة كهربائية Q. فإذا كانت كثافة الشحنة الحجمية هي ρ يكون:

$$Q = \int_\tau \rho\, d\tau \qquad (12)$$

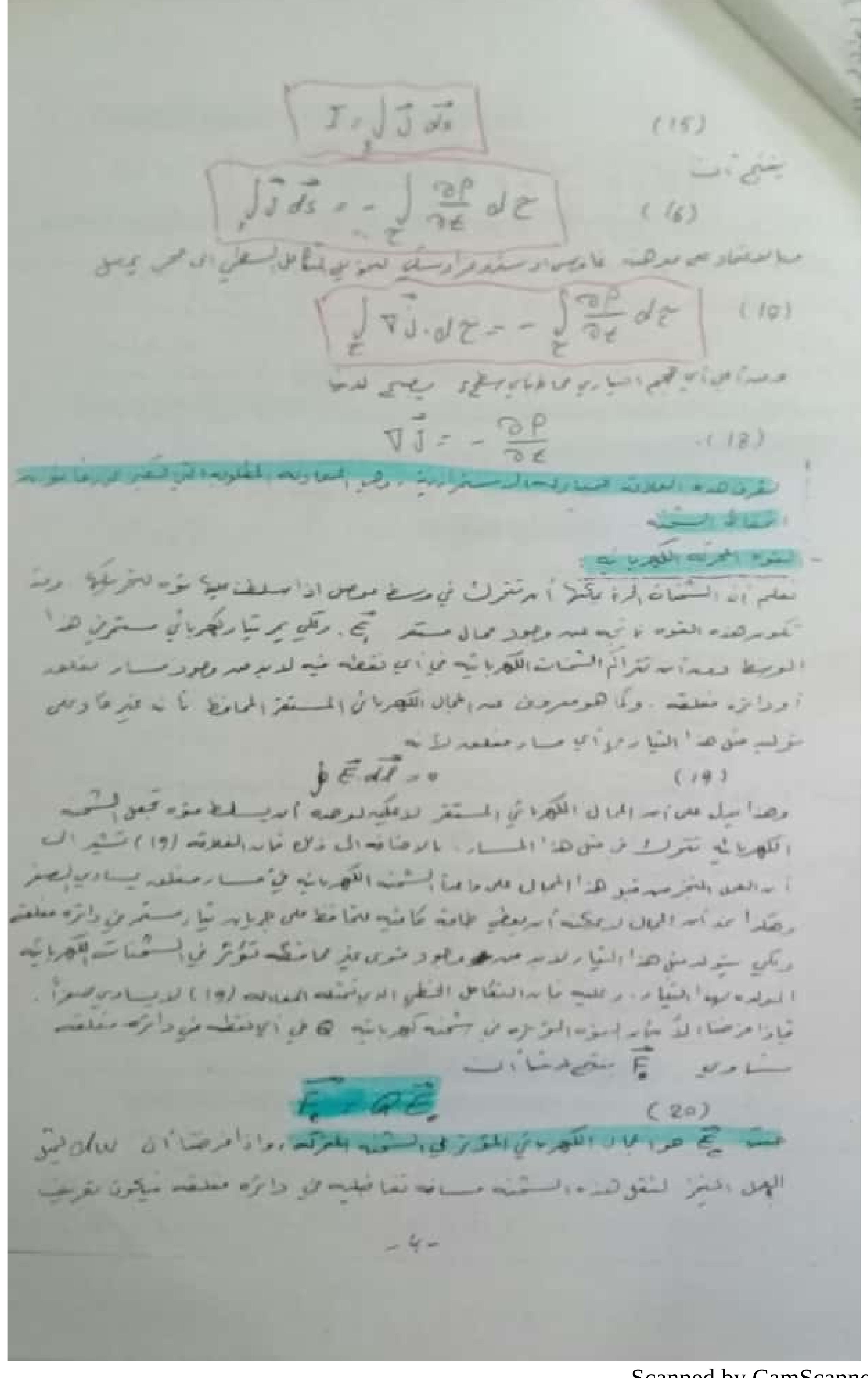
أما التيار الكلي I فيرتبط بهذه الشحنة حسب العلاقة

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad (13)$$

والإشارة السالبة تدل على أن هذه الشحنة أخذت بالتناقص. حيث ما ينقص من الشحنة يكون مقدار ما يمر خارج السطح المغلق S يساوي مقدار ما ينقص من الحيز المحاط بذلك السطح. ومن العلاقتين (12) و(13) نجد أن

$$I = -\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\tau \qquad (14)$$

نلاحظ هنا أن التفاضل الكلي تحول الى تفاضل جزئي وذلك لأن كثافة الشحنة الحجمية ρ هي تابع للموضع أيضاً. ولما كان التيار الكلي I مرتبطاً بكثافة التيار j بالعلاقة



$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s} \qquad (15)$$

ينتج ان

$$\oint \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau \qquad (16)$$

وباستخدام نظرية التباعد يمكن تحويل التكامل السطحي الى حجمي فيصبح

$$\int_{\tau} \nabla\cdot\vec{J}\, d\tau = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau \qquad (17)$$

وبما ان الحجم اختياري فان ما تحت التكاملين يتساوى لذلك

$$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (18)$$

تعرف هذه العلاقة بمعادلة الاستمرارية وهي المعادلة المطلوبة التي تعبر رياضيا عن مبدأ حفظ الشحنة.

- **القوة الدافعة الكهربائية:**

نعلم ان الشحنات الحرة يمكن ان تتحرك في وسط موصل اذا سلطت عليها قوة لتحريكها. ونتيجة لتأثير هذه القوة فانه عند وجود مجال مستقر $\vec{E}$ ويكون هناك تيار كهربائي مستمر في هذا الوسط نجد انه لكي لا تتراكم الشحنات الكهربائية في اي نقطة فيه لابد من وجود مسار مغلق او دائرة مغلقة. ولكن كما هو معروف عن المجال الكهربائي المستقر المحافظ فانه غير قادر على تولد مثل هذا التيار في اي مسار مغلق لأن

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad (19)$$

وهذا يدل على ان المجال الكهربائي المستقر لا يمكنه لوحده ان يسلط قوة تجعل الشحنة الكهربائية تتحرك في مثل هذا المسار. بالاضافة الى ذلك فان العلاقة (19) تشير الى ان الشغل المنجز من قبل هذا المجال على وحدة الشحنة الكهربائية في مسار مغلق يساوي صفر وهذا يعني ان المجال لا يمكنه ان يعطي طاقة كافية للمحافظة على جريان تيار مستمر في دائرة مغلقة ولكي يتولد مثل هذا التيار لابد من وجود قوى غير كهروستاتيكية تؤثر في الشحنات الكهربائية المولدة لهذا التيار. ويعني هذا ان التكامل الخطي الذي تضمنته المعادلة (19) لا يساوي صفرا. فاذا افترضنا ان القوة المؤثرة في شحنة كهربائية q في اي نقطة في دائرة مغلقة تساوي $\vec{F}$ فيمكن كتابة ان

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (20)$$

حيث $\vec{E}$ هو المجال الكهربائي المؤثر في الشحنة المتحركة، واذا افترضنا ان الشغل المنجز لنقل وحدة الشحنة مسافة تفاضلية في دائرة مغلقة فيكون تعريف

القوة الدافعة الكهربائية $\mathcal{E}$ حسب العلاقة الآتية

$$\mathcal{E} = \oint \frac{dW}{Q} = \oint \frac{\vec{F}\cdot d\vec{l}}{Q} = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \qquad (21)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن التكامل الخطي المغلق للمجال $\vec{E}_e$ لا يساوي صفراً بل يساوي $\mathcal{E}$. وبالرغم من أن $\mathcal{E}$ تسمى القوة الدافعة الكهربائية إلا أنها ليست قوة وتعرف بأنها الشغل المبذول لنقل وحدة الشحنات الموجبة مرة واحدة حول دائرة مغلقة ولهذا تكون وحدة قياسها هي الفولت.

إن القوى التي تحرك الشحنات الكهربائية في مسار مغلق قد تتولد نتيجة التفاعلات الكيميائية التي تحصل في عملية كهربائية أو قد تتولد في المزدوجات الحرارية أو في المولدات الكهربائية وغير ذلك، وأي جهاز يولد مثل هذه القوة يسمى مصدر القوة الدافعة الكهربائية. فإذا فرضنا أن $\vec{E}$ تمثل محصلة المجال الكهربائي لجميع هذه القوى فإنه يكون

$$\vec{E}_t = \vec{E}_s + \vec{E}_e \qquad (22)$$

وبما أن الوسط الذي وردت فيه مثل هذه القوى يخضع لقانون أوم ينبغي لدينا أن

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E}_s + \vec{E}_e \qquad (23)$$

وهذه العلاقة تستخدم لحساب العمل المنجز عندما تتحرك وحدة الشحنات الموجبة بين أي نقطتين a وb في دائرة مغلقة وبالتالي

$$\int_a^b \frac{\vec{J}\cdot d\vec{l}}{\sigma} = \int_a^b \vec{E}_s\cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_e\cdot d\vec{l} \qquad (24)$$

إن التكامل الأول في يمين المعادلة (24) يمثل فرق الجهد بين النقطتين a وb أي أن

$$\int_a^b \vec{E}_s\cdot d\vec{l} = \Phi_a - \Phi_b \qquad (25)$$

في حين أن التكامل الثاني يمثل القوة الدافعة الكهربائية الكائنة بين النقطتين a وb ويرمز لها بالرمز $\mathcal{E}_{ab}$. أما التكامل الخطي في يسار العلاقة فيمكن كتابته على النحو التالي

$$\int_a^b \frac{\vec{J}\cdot d\vec{l}}{\sigma} = I\int_a^b \frac{dl}{\sigma S} = IR_{ab} \qquad (26)$$

حيث I هو التيار الذي يسري بين النقطتين a وb وأن R_{ab} هي المقاومة الكلية بينهما. إذن فإن

$$IR_{ab} = \Phi_a - \Phi_b + \mathcal{E}_{ab} \qquad (27)$$

تسمى العلاقة (27) بالمعادلة الأساسية للدائرة التي تستخدم كثيراً في الشبكات الكهربائية. فإذا اعتبرنا الآن أن النقطة a انطبقت على النقطة b لتكون الدائرة مغلقة ونستنتج أن

$$\Phi_2 = \Phi_1 \quad و$$

$$\mathcal{E} = I R \qquad (28)$$

وهنا تمثل R المقاومة المكافئة و $\mathcal{E}$ هو مصدر القوة المحركة الكهربائية في الدائرة المغلقة. لنفرض الآن أن الشحنة الكهربائية المتحركة ولدت تياراً كهربائياً مستمراً (I) فإن مقدار ما يستهلك من الطاقة الكهربائية في الثانية الواحدة في الدائرة المغلقة هو $\mathcal{E} I$. وإذا كانت R تمثل المقاومة الكلية في الدائرة فإنه يحصل لدينا أن

$$\mathcal{E} I = I^2 R \qquad (29)$$

وتسمى الطاقة الكهربائية المستهلكة في الثانية الواحدة بالقدرة وتقاس بالواط.

- المعادلات التفاضلية المرتبطة بالمجال والتيار الكهربائي المستمر:

عند دراستنا للتيار الكهربائي المستمر في الأوساط الموصلة الخالية من مصادر القوة المحركة الكهربائية وجدنا أن هناك علاقة بين كل من $\vec{E}$ و Φ وكذلك $\vec{E}$ و $\vec{J}$. ويمكن كتابة هذه العلاقات بالشكل الآتي:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi$$
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (30)$$
$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

ومن هذه المعادلات نحصل على العلاقة التالية:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = 0 \qquad (31)$$

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها σ ثابتة كما هو معروف بالنسبة للأوساط الموصلة متجانسة الخواص فإن المعادلة (31) تتحول إلى معادلة لابلاس

$$\nabla^2 \Phi = 0 \qquad (32)$$

- القوة المغناطيسية المؤثرة على شحنة متحركة

بعد اكتشاف العالم أورستد العلاقة الوثيقة بين الكهربائية والمغناطيسية وتتابع ظهور علماء مثل فاراداي و هنري [illegible] ابحاثهم في هذا المجال وأن التطورات التي وضعها العالم ماكسويل بعد ذلك قد بينت أن هذه العلاقة حقيقية وأن المجال المغناطيسي هو توأم للمجال الكهربائي.

وسوف ندرس المجالات المغناطيسية المتولدة من التيارات الكهربائية المستمرة. لقد دلت التجارب العلمية على أنه عندما تتحرك شحنة كهربائية في مجال مغناطيسي فإنه تؤثر عليها قوة مستعرضة [illegible] اتجاهها [illegible] وإن هذه القوة بالعلاقة المتجهية الآتية:

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (33)$$

حيث Q هي الشحنة الكهربائية المتحركة وتعد هنا موجبة و $\vec{v}$ هي سرعتها و $\vec{B}$ هو مجال الحث المغناطيسي (أو كثافة الفيض المغناطيسي). ويلاحظ الشكل (2)

$\vec F = Q(\vec v \times \vec B)$

الشكل (2)

أن القوة $\vec F$ عمودية على كل من $\vec v$ و $\vec B$ ويكون اتجاهها خاضعاً لقاعدة اليد اليمنى حسب تعريف حاصل الضرب الاتجاهي. وإذا فرضنا أن θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec v$ و $\vec B$ فإنه ينتج أن:

$$F = QvB\sin\theta \qquad (34)$$

ومن هذه العلاقة يمكننا قياس شدة المجال المغناطيسي (كثافة الفيض المغناطيسي) $\vec B$ بشرط أن يكون المجال المغناطيسي الذي تولده الشحنة نفسها أثناء حركتها غير مؤثر على المجال المغناطيسي الأصلي الذي تتحرك فيه وعليه نكتب

$$B = \frac{F}{Qv\sin\theta} \qquad (35)$$

ووحدة قياس B هي $N/A.m$ (نيوتن لكل متر أمبير) أو Wb/m^2 حيث Wb تمثل وحدة قياس الفيض المغناطيسي وتسمى الويبر. وفي النظام الدولي للوحدات تختصر وحدة قياس كثافة الفيض المغناطيسي إلى الوحدة (تسلا)

$$1\,T = 1\,Wb/m^2$$

ونشير هنا إلى أن اتجاه F الناتج من حاصل الضرب الاتجاهي بين المتجهين B و v ينعكس إذا تغيرت إشارة الشحنة المتحركة وأصبحت سالبة.

- القوة المغناطيسية المؤثرة على عنصر التيار:

لنوجد الآن القوة المغناطيسية التي تؤثر في سلك موصل متناهي في الصغر dl يحمل تياراً كهربائياً مقداره I كما في الشكل (3).

الشكل (٢)

نفرض أن جميع الشحنات الحرة في هذا السلك الموصل تتحرك بسرعة انسياقية واحدة تساوي $\vec v$ وتحمل كل منها شحنة كهربائية Q. إذن القوة التي تؤثر في كل شحنة من هذه الشحنات المتواجدة في السلك (العنصر) يمكن حسابها من العلاقة (33) إذا علمنا أن B تمثل معدل كثافة الفيض المغناطيسي عند العنصر dl. وهكذا فإن القوة الكلية المؤثرة في جميع هذه الشحنات داخل العنصر الأساسي

$$d\vec F = Qns\,dl\,(\vec v \times \vec B) \qquad (36)$$

حيث أن n تمثل عدد الشحنات الحرة في وحدة الحجم و s هي مساحة مقطع السلك. ولما كان $d\vec l$ يمكن اعتباره متجهاً باتجاه $\vec v$ وقيمته dl إذن

$$\vec v\,dl = v\,d\vec l \qquad (37)$$

إذن

$$d\vec F = Qns\,v\,(d\vec l \times \vec B) \qquad (38)$$

وبالكتابة الاتجاهية وبما أنها تحمل التيار الكلي I الجاري في السلك فإن ذلك يعطي:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \qquad (38)$$

وهذه العلاقة تحدد القوة المؤثرة على عنصر التيار بالمقدار والاتجاه وتستخدم لحساب القوة الكلية $\vec{F}$ المؤثرة على دائرة مغلقة. فإذا افترضنا أن C يمثل هذه الدائرة، يكون عندئذ:

$$\vec{F} = \oint I(d\vec{l} \times \vec{B}) \qquad (39)$$

وهذه العلاقة يمكن أن تكتب بشكل آخر إذا افترضنا أن كثافة الفيض المغناطيسي (المجال المغناطيسي B) تبقى ثابتة مع التيار ولا تعتمد على الموضع أي:

$$\vec{F} = I\left\{\oint d\vec{l}\right\} \times \vec{B} \qquad (40)$$

إن التكامل الموضح في العلاقة (40) يمثل مجموع المتجهات المكونة للدائرة المغلقة فهو لذلك يساوي صفراً أي أن:

$$\vec{F} = \oint_c I(d\vec{l} \times \vec{B}) = 0 \qquad (41)$$

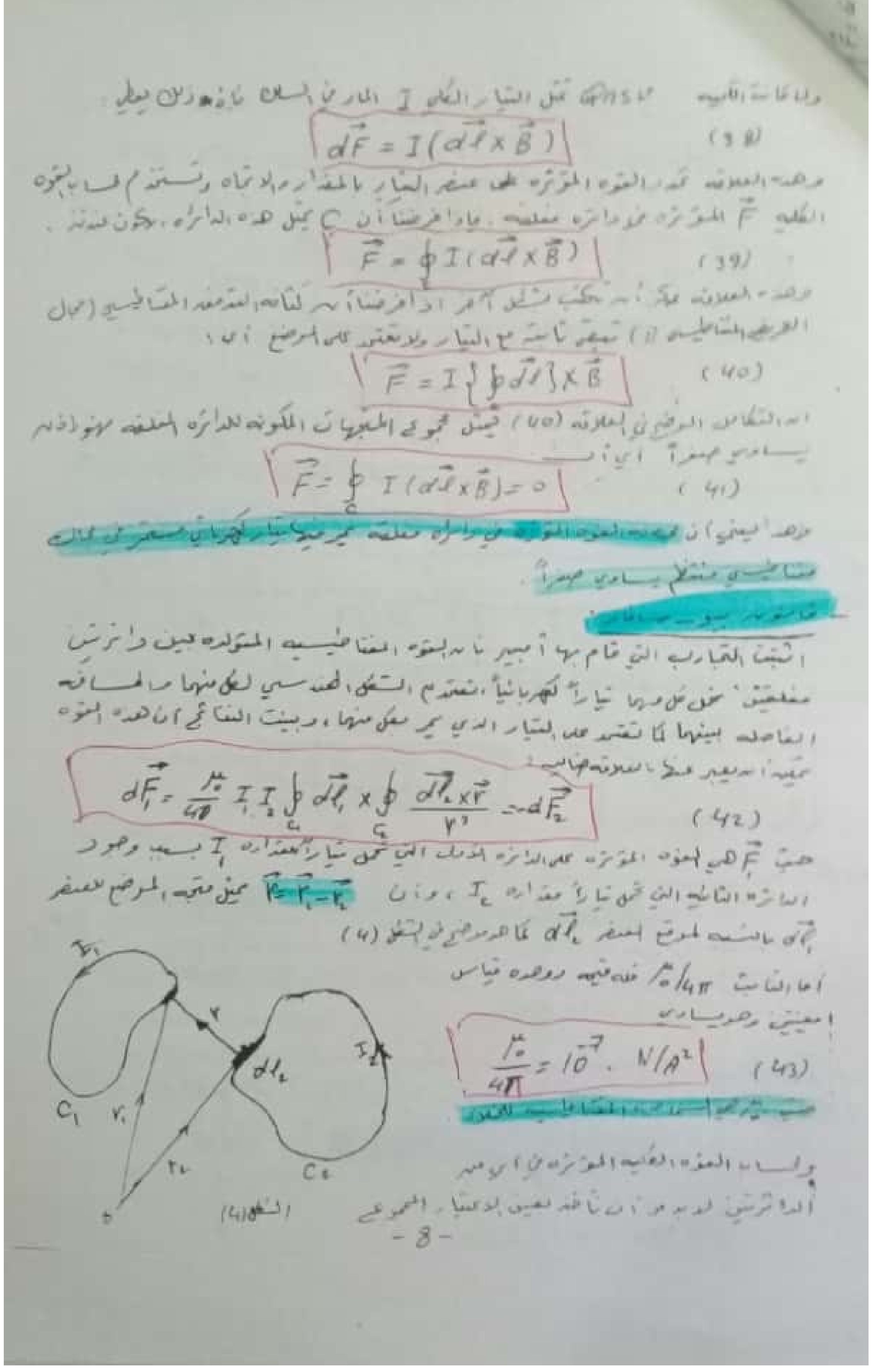
وهذا يعني أن محصلة القوة المؤثرة على دائرة مغلقة يمر بها تيار كهربائي مستقر في مجال مغناطيسي منتظم يساوي صفراً.

قانون بيو - سافار

أثبتت التجارب التي قام بها أمبير أن القوة المغناطيسية المتولدة بين دائرتين مغلقتين تحمل كل منهما تياراً كهربائياً تعتمد على الشكل الهندسي لكل منهما والمسافة الفاصلة بينهما كما تعتمد على التيار الذي يمر بكل منهما، وبينت النتائج أن هذه القوة يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية:

$$d\vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{c_1} d\vec{l}_1 \times \oint_{c_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}}{r^3} = -d\vec{F}_2 \qquad (42)$$

حيث $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة على الدائرة الأولى التي تحمل تياراً مقداره I_1 بسبب وجود الدائرة الثانية التي تحمل تياراً مقداره I_2، وأن $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ يمثل متجه الموضع للعنصر $d\vec{l}_1$ بالنسبة لموقع العنصر $d\vec{l}_2$ كما هو موضح في الشكل (4)



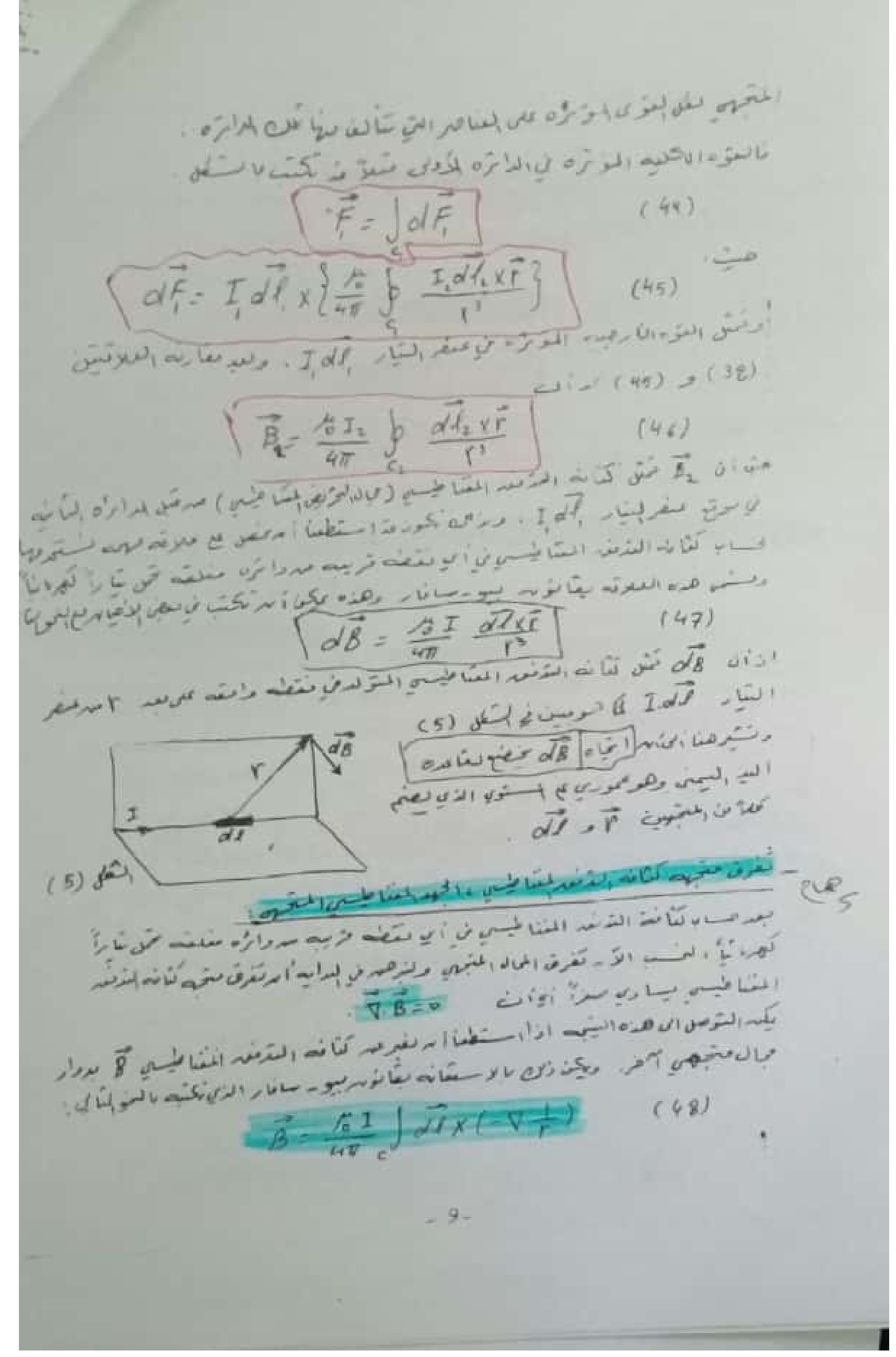
الشكل (4)

أما الثابت $\mu_0/4\pi$ فله قيمة ووحدة قياس معينتين وهو يساوي

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ N/A^2 \qquad (43)$$

حيث تسمى μ_0 النفاذية المغناطيسية للفراغ

ولحساب القوة الكلية المؤثرة في أي من الدائرتين لابد من أن نأخذ بنظر الاعتبار المجموع



المتجهي لكل القوى المؤثرة على العناصر التي تتألف منها تلك الدائرة.
فالقوة الكلية المؤثرة في الدائرة الأولى يمكن أن تكتب بالشكل

$$\vec{F}_1 = \int_{c} d\vec{F}_1 \qquad (44)$$

حيث:

$$d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}}{r^3} \right\} \qquad (45)$$

وتمثل القوة الخارجية المؤثرة في عنصر التيار $I_1 d\vec{l}_1$. وبعد مقارنة العلاقتين (34) و (45) نجد أن

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{c_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}}{r^3} \qquad (46)$$

حيث أن $\vec{B}_2$ تمثل كثافة الفيض المغناطيسي (مجال الحث المغناطيسي) عند عنصر الدائرة الثانية الناتج عن عنصر التيار $I_2 d\vec{l}_2$. ومن هنا نكون قد استطعنا أن نحصل على طريقة مهمة نستخدمها لحساب كثافة الفيض المغناطيسي في أي نقطة قريبة من دائرة مغلقة تحمل تيارًا كهربائيًا وتسمى هذه العلاقة بقانون بيوت-سافار وهذه يمكن أن تكتب في شكلها التفاضلي على النحو

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (47)$$

إذ أن $d\vec{B}$ تمثل كثافة الفيض المغناطيسي المتولد في نقطة واقعة على بعد r من عنصر التيار $I d\vec{l}$ كما موضح في الشكل (5)
ونشير هنا إلى أن اتجاه $d\vec{B}$ يخضع لقاعدة اليد اليمنى وهو عمودي على المستوي الذي يضم كلاً من المتجهين $d\vec{l}$ و $\vec{r}$.

الشكل (5)

مهم

- تفرق متجه كثافة الفيض المغناطيسي والجهد المغناطيسي المتجهي:

بعد حساب كثافة الفيض المغناطيسي في أي نقطة قريبة من دائرة مغلقة تحمل تيارًا كهربائيًا، لنحسب الآن تفرق المجال المتجهي ونرى هنا في البداية أن تفرق متجه كثافة الفيض المغناطيسي يساوي صفرًا أي أن $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.
يمكن التوصل إلى هذه النتيجة إذا استطعنا أن نعبر عن كثافة الفيض المغناطيسي $\vec{B}$ بدلالة مجال متجهي آخر، ويمكن ذلك بالاستعانة بقانون بيوت-سافار الذي نكتبه بالشكل التالي:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{c} d\vec{l} \times \left(-\nabla \frac{1}{r}\right) \qquad (48)$$

أي إننا عوضنا عن الكمية المتجهة $\frac{\vec{r}}{r^3}$ بالكمية المتجهة المساوية لها أي أن $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

وبالتالي فإن:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{I\,d\vec{l}}{r} \qquad (49)$$

فإذا فرضنا أن:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l\frac{d\vec{l}}{r} \qquad (50)$$

فإننا نحصل على أن:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \qquad (51)$$

وبما أن $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ (من دراسة المتجهات، وهي متطابقة).

فإننا نحصل على أن:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

يسمى المتجه $\vec{A}$ الذي دورانه يساوي $\vec{B}$ بالجهد المغناطيسي المتجهي.

في بعض الأحيان يمكن أن نستبدل التكامل الخطي في العلاقتين (49) و(50) إلى تكامل حجمي ويتم ذلك على النحو التالي:

dl, $\vec{J}$, s', $\vec{r}$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, P

الشكل (6)

نلاحظ من الشكل (6) نعتبر أن متجه كثافة التيار يرتبط بالتيار الكلي المار في الدائرة المغلقة حسب العلاقة

$$J\,s' = I$$

حيث s' هو مساحة مقطع الدائرة الحاملة لهذا التيار:

إذن:

$$I\,d\vec{l} = \vec{J}\,s'\,d\vec{l} \Rightarrow I\,d\vec{l} = \vec{J}\,d\tau \qquad (52)$$

حيث أن $d\tau$ هو عنصر تفاضلي لسلك طوله dl من الدائرة. إذن فإن قانون بيو-سافار يأخذ الصيغة التالية:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3}\,d\tau \qquad (53)$$

أما الجهد المغناطيسي المتجهي فيأخذ الشكل التالي:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\vec{J}}{r}\,d\tau \qquad (54)$$

ومن هذا يمكن أن نثبت أن تفرق المتجه $\vec{A}$ عند أي نقطة يساوي صفراً؟ أي أن

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad (55)$$

بما أن كثافة التيار $\vec{J}$ هو تابع لإحداثيات الحجم التفاضلي $d\tau$ أما r هو تابع لإحداثيات النقطة P وكذلك $d\tau$ فإن:

$$\nabla_1\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla_2\left(\frac{1}{r}\right)$$

حيث $r = r_1 - r_2$ ، ∇_1 و ∇_2 عملية تفاضل للمتغير r_1 و r_2 على التوالي. وبالتالي ينتج لدينا:

$$\nabla_1\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla_1\cdot\int\frac{\vec{J}\,d\tau}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\nabla_1\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)d\tau$$

• إذاً:

$$\nabla_1\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \vec{J}\cdot\nabla_1\left(\frac{1}{r}\right)d\tau=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \vec{J}\cdot\nabla_2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau$$

اذن

$$\nabla_1\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \nabla_2\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)d\tau+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\nabla_2\cdot\vec{J}}{r}d\tau$$

وبما أن $\nabla_2\cdot\vec{J}=0$ في حالة التيارات المستمرة وبالتالي :

$$\nabla_1\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \nabla_2\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)d\tau$$

وباستخدام مبرهنة كاوس لتحويل التكامل الحجمي الى سطحي يكون لدينا

$$\nabla_1\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_s \frac{\vec{J}\cdot d\vec{s}}{r} \qquad (56)$$

حيث ds هو السطح الذي يحيط بالحجم $d\tau$. وبما أن التيار كله يجري في الدائرة المغلقة يكون موازياً للسطح الذي يحيطه وعليه يكون

$$\int_s \frac{\vec{J}\cdot d\vec{s}}{r}=0 \quad\Rightarrow\quad \nabla_1\cdot\vec{A}=0$$

دوران متجه كثافة الفيض المغناطيسي : قانون أمبير

مهم الاستنتاج

في هذه الفقرة سنحاول أن نثبت أنه في حالة التيارات المستمرة في الأوساط الغير مغناطيسية يجب أن تتحقق العلاقة المهمة الآتية :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J} \qquad (57)$$

نستخدم العلاقة $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ونخضع المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ ليؤثر على طرفي هذه العلاقة أي :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$ وعليه

وباستخدام متطابقات المتجهات لدينا

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

وبما أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ ينتج لدينا :

$$\nabla^2\vec{A}=-\vec{\nabla}\times\vec{B} \qquad (58)$$

نخضع الآن المؤثر التفاضلي ∇^2 ليؤثر على طرفي المعادلة (54) فنحصل على :

$$\nabla^2\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \nabla^2\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)d\tau \qquad (59)$$

P(x,y,z)

r

$d\tau$

P′(x′,y′,z′)

$\vec{R}$

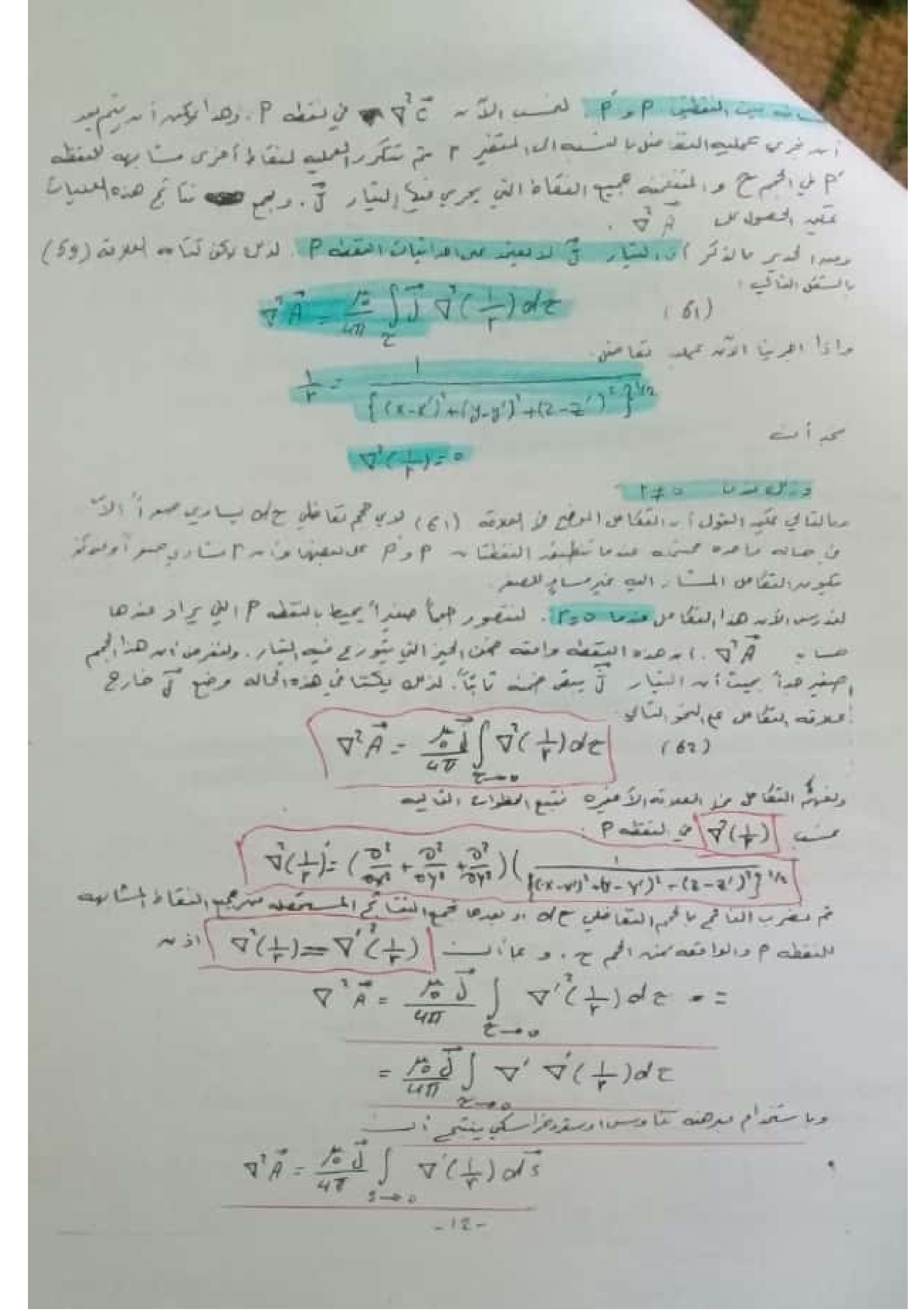
O

(الشكل 7)

إن مفهوم هذه العلاقة يظهر من خلال دراسة الشكل (7) ، حيث نرى أن ما يهمنا هو إيجاد متجه في النقطة P حيث يتطلب حساب $\nabla^2 A$. وهذا المتجه هو

$$\vec{C}=\frac{\vec{J}\,d\tau}{r} \qquad (60)$$

حيث أن $\vec{J}$ و $d\tau$ هي كثافة التيار والحجم التفاضلي في النقطة ′P مع ملاحظة أن r هو



المسافة بين النقطتين P و P' لنحسب الآن $\nabla^2 \vec{c}$ [redacted] في النقطة P. وهذا يمكن أن يتم بعد أن نجري عملية التفاضل بالنسبة الى المتغير r ثم نكرر العملية لنقاط أخرى مشابهة للنقطة P' في الحجم τ و المتضمنة جميع النقاط التي يجري فيها التيار $\vec{J}$. وبجمع [redacted] نتائج هذه العمليات نتمكن الحصول على $\nabla^2 \vec{A}$.

ومن الجدير بالذكر أن التيار $\vec{J}$ لا يعتمد على احداثيات النقطة P. لذلك يمكن كتابة العلاقة (59) بالشكل التالي:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \vec{J}\, \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d\tau \qquad (61)$$

واذا اجرينا الآن عملية تفاضل

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{1/2}}$$

نجد أن

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

وذلك عندما $r \neq 0$

وبالتالي يمكن القول أن التكامل الموجود في العلاقة (61) لأي حجم تكاملي τ يساوي صفراً الا في حالة واحدة محددة عندما تنطبق النقطتان P و P' على بعضهما أي أن r تساوي صفراً ولهذا تكون قيمة التكامل المشار اليه غير مساوية للصفر.

لندرس الآن هذا التكامل عندما $r = 0$. لنتصور حجماً صغيراً محيطاً بالنقطة P التي يراد عندها حساب $\nabla^2 \vec{A}$، وهذه النقطة واقعة ضمن الحيز الذي يتوزع فيه التيار. ولنفرض أن هذا الحجم صغير جداً بحيث أن التيار $\vec{J}$ يبقى ضمنه ثابتاً. لذلك يمكننا في هذه الحالة وضع $\vec{J}$ خارج علامة التكامل على النحو التالي:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi} \int_{\tau \to 0} \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) d\tau \qquad (62)$$

ولغرض التكامل في العلاقة الأخيرة نتبع الخطوات التالية
نحسب $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$ في النقطة P.

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{1}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{1/2}}\right)$$

ثم نضرب الناتج بالحجم التفاضلي $d\tau$ ثم بعدها نجمع النتائج المستحصلة من جميع النقاط المشابهة للنقطة P والواقعة ضمن الحجم τ. وبما أن $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla'^2\left(\frac{1}{r}\right)$ اذن

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi} \int_{\tau \to 0} \nabla'^2\left(\frac{1}{r}\right) d\tau =$$

$$= \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi} \int_{\tau \to 0} \nabla' \cdot \nabla'\left(\frac{1}{r}\right) d\tau$$

وباستخدام مبرهنة تاوس (مبرهنة كاوس) او ستوكس يتضح أن

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi} \int_{s \to 0} \nabla'\left(\frac{1}{r}\right) \cdot d\vec{s}$$

وبما أن:

$$\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

نحصل على:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi} \int_{s} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{r^3} \qquad (63)$$

ولكن $\vec{r}$ حيث متجه من النقطة ' إلى النقطة المصدر p نقطة المجال. لو تأملنا أنه في هذه الحالة أن r يتجه نحو الداخل إلى النقطة P ومنه نحصل العلاقة الأخيرة بالشكل التالي:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{\mu_0 \vec{J}}{4\pi} \int_{s} d\Omega \qquad (64)$$

حيث $d\Omega$ هي الزاوية المجسمة التفاضلية التي تقابل مساحة تفاضلية ds في النقطة P، وبما أن السطح S يحيط كلياً بالنقطة P يكون:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \qquad (65)$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة (58) ينتج أن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

وهذه العلاقة تصح في حالة المجالات المستقرة في الأوساط الخالية من المواد المغناطيسية. أما استخدام مبرهنة ستوك للعلاقة (57) ينتج منه قانون أمبير مكتوباً على النحو التالي:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

ونعرف أن:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

وبالتالي:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \qquad (66)$$

أي أن التكامل الخطي لكثافة التدفق المغناطيسي حول مسار مغلق C يساوي حاصل ضرب μ_0 في التيار الكلي I المار بالسطح S الذي تحيطه حواف ذلك المسار.

- **الجهد المغناطيسي العددي:**

إذا تأملنا المعادلة (57) نلاحظ أن دوران كثافة التدفق المغناطيسي يصبح صفراً عندما تصبح كثافة التيار $\vec{J}$ مساوية صفراً. وفي هذه الحالة يمكن التعبير عن كثافة التدفق المغناطيسي بدلالة جهد عددي على النحو التالي:

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m \qquad (67)$$

وبما أن تفرق المجال $\vec{B}$ يساوي صفراً دائماً نحصل على:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -\mu_0 \nabla^2 \Phi_m = 0 \qquad (68)$$

إذن

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \qquad (69)$$

نسمي الدالة Φ_m بالجهد المغناطيسي العددي وهو يحقق معادلة لابلاس. لذلك فإننا نستطيع اتباع الطرق التي درست في الكهربائية المستقرة لنحصل على حل هذه المعادلة.

١- الدفق المغناطيسي

تعريف الكمية

$$\Phi_s = \int \vec{B}\cdot\vec{ds} \qquad (70)$$

بالدفق المغناطيسي الذي يقطع سطحاً مفتوحاً S تحدده حدوده على مسار مغلق C، وتقاس هذه الكمية بالويبر (Wb) وهي تساوي في الجملة الدولية للوحدات (تسلا × متر²) $T.m^2$. ولما كانت كثافة الدفق $\vec{B}$ ترتبط بالجهد $\vec{A}$ حسب العلاقة $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ فإنه ينتج بعد الاستفادة من نظرية ستوكس:

$$\oint_c \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int_s \nabla\times\vec{A}\cdot\vec{ds} = \int \vec{B}\cdot\vec{ds} \qquad (71)$$

وبالتالي

$$\Phi_s = \oint_c \vec{A}\cdot\vec{dl} \qquad (72)$$

أي أن التكامل الخطي للجهد المغناطيسي المتجه حول المسار المغلق C يساوي الدفق المغناطيسي المار بالسطح S الذي تحدده حدوده على هذا المسار. ويمكن استخدام العلاقة (72) لحساب الجهد المغناطيسي $\vec{A}$. ونشير هنا إلى أن خطوط القوى المغناطيسية مستمرة وهي مكونة من مسارات مغلقة على نفسها، أي أنها لا تبدأ من ولا تنتهي إلى أي نقطة، وبالتالي من الممكن إثبات أن محصلة الدفق المغناطيسي الذي يخترق أي سطح مغلق يساوي صفراً، وهذا يعني أن الدفق الداخل لهذا السطح يساوي بالمقدار ويخالف بالإشارة الدفق الخارج منه. وعلى هذا الأساس يمكننا كتابة العلاقة التالية:

$$\oint_s \vec{B}\cdot\vec{ds} = 0 \qquad (73)$$

ولما كان تفرق $\vec{B}$ دائماً يساوي صفراً، نستطيع التعبير عنه على أساس أوستروغرادسكي غوص:

$$\oint_s \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_\tau \nabla\cdot\vec{B}\, d\tau = 0 \qquad (74)$$

نستنتج مما سبق أن الدفق المغناطيسي الذي يمر خلال أي دائرة مغلقة لا يتغير مع شكل السطح المحدد بهذه الدائرة.